3/ On désigne par C' et D' les images respectives de C et D par la rotation f de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

a- Montrer que lorsque M varie sur la parabole $\mathscr{P}$ son image M' par la rotation f varie sur une parabole $\mathscr{P}'$ dont on précisera le foyer et la directrice.

b- Montrer que D' est un point commun à $\mathscr{P}$ et à $\mathscr{P}'$ et que ces deux paraboles admettent en D' une tangente commune qu'on précisera.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1/a- Soit α un réel.

$(i\alpha)$ est solution de (E)

$\Leftrightarrow (i\alpha)^3 - 2\left(\sqrt{3}+i\right)(i\alpha)^2 + 4\left(1+i\sqrt{3}\right)(i\alpha) - 8i = 0$

$\Leftrightarrow -i\alpha^3 + 2\alpha^2\sqrt{3} + 2i\alpha^2 + 4i\alpha - 4\alpha\sqrt{3} - 8i = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\alpha^2\sqrt{3} - 4\alpha\sqrt{3}\right) + i(-\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 8) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2\sqrt{3} - 4\alpha\sqrt{3} = 0 \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha\sqrt{3}(\alpha - 2) = 0 \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 8 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 2 \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2$ car seul 2 vérifie la seconde équation

Conclusion : 2i est la solution imaginaire pure de (E).

b- Soit le polynome $f(z) = z^3 - 2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2 + 4\left(1+i\sqrt{3}\right)z - 8i$

2i est solution de $f(z) = 0$

$\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $f(z)=(z-2i)(az^2+bz+c); \forall z \in \mathbb{C}$

Or $f(z) = (z-2i)(az^2+bz+c); \forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow f(z) = az^3 + bz^2 + zc - 2iaz^2 - 2ibz - 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow f(z) = az^3 + (-2ia+b)z^2 + (-2ib+c)z - 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -2ia + b = -2\left(\sqrt{3}+i\right) \\ -2ib + c = 4\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ -2ic = -8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2\sqrt{3} \\ c = 4 \end{cases}$

Ainsi $f(z) = (z-2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right); \forall z \in \mathbb{C}$

Par suite (E) $\Leftrightarrow f(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$